کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ –فنی (۶ گروه هماهنگ)** نیمسال (**اول**/دوم) **۹۴-۱۳۹۳** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۳/۱۰/۱۷** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.

در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱- الف) انتگرال منحنی‌الخط $\oint_{|x|+|y|=1} \nabla(e^{x+y})dr$ را محاسبه کنید. **۱۰ نمره**

ب) انتگرال دوگانه $\int_0^1 \int_{e^y}^{e} \frac{x}{\ln x}\, dx\, dy$ را محاسبه کنید. **۱۰ نمره**

سوال۲- D ناحیه محدود به چهار منحنی $x = y^2$, $3x = y^2$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$ است.

انتگرال مقابل را محاسبه کنید : $\iint_D e^{\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}}\, dA$ **۱۵ نمره**

سوال۳- حجم ناحیه محدود به سطوح $z^2 = 16 + x^2 + y^2$ و $x^2 + y^2 = 9$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴- D قسمتی از ربع اول دستگاه مختصات است که درون دایره $x^2 + y^2 = 9$ قرار دارد و C مرز ناحیه D است. درستی قضیه گرین را برای میدان برداری $\vec{F} = (x+2y)\vec{i} + xy\,\vec{j}$ روی منحنی C بررسی کنید. **۲۰ نمره**

سوال۵- فرض کنید $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, 0, 0)$ و $K = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geq 0\}$ مطلوب است مقدار $\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$. ($a > 0$) **۱۵ نمره**

سوال۶- R ناحیه محدود به سهمیگون $z = 1 - x^2$ و صفحات $z = 0$ ، $y = 0$ ، $y + z = 2$ است و S سطح خارجی ناحیه R می‌باشد.

اگر $\vec{F} = xy\,\vec{i} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$ یک میدان برداری باشد مطلوب است :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

۱۵ نمره

موفق باشید

سوال۱- الف) روش اول : می‌دانیم که اگر $F(x,y)=(p(x,y),q(x,y))$ و تابع $f(x,y)$ موجود باشد بطوریکه در یک ناحیه D $F(x,y)=\nabla f(x,y)=grad f(x,y)$ آنگاه : $\int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r}=f(B)-f(A)$

که در آن C یک منحنی درون ناحیه D و A و B نقاط ابتدا و انتهای C هستند. اگر C یک مسیر بسته درون ناحیه D باشد داریم :

$$\int_C \vec{F}(x,y)d\vec{r}=۰$$

در این مساله $F(x,y)=\nabla(e^{x+y})$ و $|x|+|y|=۱$ یک مربع است بنابر این $\oint_{|x|+|y|=۱}\nabla(e^{x+y})d\vec{r}=۰$

سوال۱- الف) روش دوم : محاسبه مستقیم : مسیر $|x|+|y|=۱$ یک مربع است. چهار ضلع مربع عبارتند از :

$$c_۱: x+y=۱, ۰\le x\le ۱ \quad , \quad c_۲: -x+y=۱, -۱\le x\le ۰ \quad , \quad c_۳: -x-y=۱, -۱\le x\le ۰ \quad , \quad c_۴: x-y=۱, ۰\le x\le ۱$$

$$dx+dy=۰ \qquad -dx+dy=۰ \qquad -dx-dy=۰ \qquad dx-dy=۰$$

$$\int_{C_۱}\nabla(e^{x+y})dr=\int_{C_۱}(e^{x+y},e^{x+y})(dx,dy)=\int_{C_۱}e^{x+y}(dx+dy)=\int_{C_۱}(e^{x+y},e^{x+y})\times ۰=۰$$

$$\int_{C_۳}\nabla(e^{x+y})dr=\int_{C_۳}e^{x+y}(dx+dy)=\int_{C_۳}(e^{x+y},e^{x+y})\times ۰=۰$$

$$\int_{C_۲}\nabla(e^{x+y})dr=\int_{C_۲}e^{x+y}(dx+dy)=\int_{۰}^{-۱}e^{۲x+۱}(۲dx)=\frac{۱}{۴}e^{۲x+۱}\Big|_{۰}^{-۱}=\frac{e^{-۱}-e}{۴}$$

$$\int_{C_۴}\nabla(e^{x+y})dr=\int_{C_۴}e^{x+y}(dx+dy)=\int_{۰}^{۱}e^{۲x-۱}(۲dx)=\frac{۱}{۴}e^{۲x-۱}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{e-e^{-۱}}{۴}$$

$$\oint_{|x|+|y|=۱}\nabla(e^{x+y})d\vec{r}=\int_{C_۱}\nabla(e^{x+y})dr+\int_{C_۲}\nabla(e^{x+y})dr+\int_{C_۳}\nabla(e^{x+y})dr+\int_{C_۴}\nabla(e^{x+y})dr=۰$$

سوال۱- ب) برای حل این انتگرال باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم . داریم :

$$\int_{y=۰}^{۱}\int_{x=e^y}^{e}\frac{x}{\ln x}\,dx\,dy=\int_{x=۱}^{e}\int_{y=۰}^{\ln x}\frac{x}{\ln x}\,dy\,dx=\int_{x=۱}^{e}\int_{y=۰}^{\ln x}\frac{x}{\ln x}y\Big|_{۰}^{\ln x}dx=\int_{x=۱}^{e}x\,dx=\frac{e^۲-۱}{۲}$$

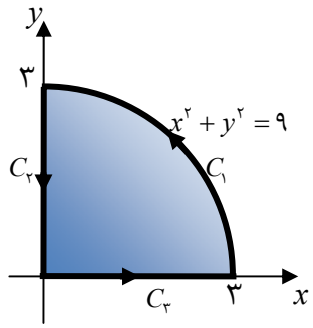
سوال۲- تغییر متغیر $u=\frac{x^۲}{y}$, $v=\frac{y^۲}{x}$ را در نظر می‌گیریم. ناحیه D در صفحه xy که محدود به چهار سهمی بود تبدیل به مستطیل D' در صفحه uv می‌شود که اضلاع آن موازی محورهای مختصات هستند. داریم $dudv=\begin{vmatrix} ۲x/y & -x^۲/y^۲ \\ -y^۲/x^۲ & ۲y/x\end{vmatrix}dxdy=۳dxdy$

$$\iint_D e^{\frac{x^۲}{y}+\frac{y^۲}{x}}dA=\frac{۱}{۳}\iint_{D'}e^{u+v}\,dudv=\frac{۱}{۳}\int_{v=۱}^{۳}\int_{u=۱}^{۲}e^ve^u\,dudv=\frac{۱}{۳}\int_{v=۱}^{۳}e^ve^u\Big|_{۱}^{۲}dv=\frac{e^۲-e}{۳}\int_{v=۱}^{۳}e^vdv=\frac{e^۲-e}{۳}e^v\Big|_{۱}^{۳}=\frac{(e^۲-e)(e^۳-e)}{۳}$$

سوال۳- این ناحیه را R می نامیم که قسمتی از درون استوانه قائم است و از بالا و پایین به هذلولیگون دوپارچه محدود شده است. این دو سطح در دو دایره اشتراک دارند. $x^۲+y^۲=۹$, $z=\pm ۵$ برای محاسبه حجم از مختصات استوانه ای استفاده می‌کنیم.

$$V=\iiint_R dV=\int_{r=۰}^{۳}\int_{z=-\sqrt{۱۶+r^۲}}^{\sqrt{۱۶+r^۲}}\int_{\theta=۰}^{۲\pi}rd\theta dzdr=۲\pi\int_{r=۰}^{۳}\int_{z=-\sqrt{۱۶+r^۲}}^{\sqrt{۱۶+r^۲}}rdzdr$$

$$=۴\pi\int_{r=۰}^{۳}r\sqrt{۱۶+r^۲}\,dr=\frac{۴\pi}{۳}(\sqrt{۱۶+r^۲})^۳\Big|_{۰}^{۳}=\frac{۴\pi}{۳}(۱۲۵-۶۴)=\frac{۲۴۴\pi}{۳}$$



سوال۴- روش اول : قضیه گرین :

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D [(xy)_x - (x+۲y)_y]dA$$

$$= \iint_D (y-۲)dA = \int_۰^۳\int_۰^{\pi/۲}(r\sin\theta - ۲)\,r d\theta\, dr = \int_۰^۳ (-r^۲\cos\theta - ۲r\theta)\Big|_۰^{\pi/۲}\, dr$$

$$= \int_۰^۳ (-\pi r + r^۲)\, dr = (\frac{-\pi}{۲}r^۲ + \frac{۱}{۳}r^۳)\Big|_۰^۳ = \frac{-۹}{۲}\pi + ۹$$

سوال۴- روش دوم : محاسبه مستقیم (محاسبه انتگرال روی سه مسیر جزئی)

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_۱}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_۲}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_۳}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$C_۱:\ x^۲+y^۲=۹,\ ۰\le x\le ۳ \ \rightarrow\ \int_{C_۱}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_۱}(x+۲y)dx + xydy = \int_۳^۰ (x+۲\sqrt{۹-x^۲})dx + x(-xdx)$$

$$\int_{C_۱}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_۳^۰ (x - x^۲ + ۲\sqrt{۹-x^۲})dx = [\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳}x^۳ + x\sqrt{۹-x^۲} + ۹\arcsin\frac{x}{۳}]_۳^۰ = -[\frac{۹}{۲} - ۹ + \frac{۹}{۲}\pi] = \frac{۹}{۲} - \frac{۹}{۲}\pi$$

$$C_۲:\ x=۰,\ ۰\le y\le ۳ \ \rightarrow\ \int_{C_۲}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_۲}(x+۲y)dx + xydy = \int_{C_۲} ۰ = ۰$$

$$C_۳:\ y=۰,\ ۰\le x\le ۳ \ \rightarrow\ \int_{C_۳}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_۳}(x+۲y)dx + xydy = \int_{C_۳} xdx = \int_۰^۳ xdx = \frac{۱}{۲}x^۲\Big|_۰^۳ = \frac{۹}{۲}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_۱}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_۲}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_۳}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{۹}{۲} - \frac{۹}{۲}\pi + ۰ + \frac{۹}{۲} = ۹ - \frac{۹}{۲}\pi$$

سوال۵- باید انتگرال سطح $\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_K x^۲ dydz$ را محاسبه کنیم.

روش اول : اثبات مستقیم با تصویر کردن ناحیه روی صفحه yz :

اگر سطح K را به دو قسمت $K_۱$ و $K_۲$ تقسیم کنیم بطوریکه روی سطح $K_۱$ داشته باشیم $x>۰$ و روی سطح $K_۲$ داشته باشیم $x<۰$.
تصویر هر یک از این دو ناحیه روی صفحه yz یک نیمدایره است که آن را D می نامیم.

$$\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{K_۱}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{K_۲}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{K_۱}(x^۲,۰,۰)\cdot(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})\frac{a}{x}dydz + \iint_{K_۲}(x^۲,۰,۰)\cdot(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})\frac{a}{-x}dxdy$$

$$= \iint_{K_۱} x^۲ dydz + \iint_{K_۲} -x^۲ dxdy = \iint_D (a^۲ - y^۲ - z^۲)dydz - \iint_D (a^۲ - y^۲ - z^۲)dydz = ۰$$

سوال۵- روش دوم : به کمک قضیه دیورژانس :

اگر سطح K' را ناحیه $x^۲+y^۲\le a^۲$, $z=۰$ با بردار نرمال یکه $\vec{n}'=(۰,۰,-۱)$ در نظر بگیریم آنگاه $K\bigcup K'$ یک سطح ساده و بسته خواهد بود . ناحیه محدود به آن را R می نامیم. طبق قضیه دیورژانس $\iint_{K\bigcup K'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_R divFdV$

$$\iint_{K\bigcup K'}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{K'}(x^۲,۰,۰)\cdot(۰,۰,-۱)\,dS = \iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{K'} ۰\times dS = \iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\iiint_R divFdV = \iiint_R ۲x\,dV = \int_{\rho=۰}^{a} ۲\rho^۳ \int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\sin^۲\varphi \int_{\theta=۰}^{۲\pi}\cos\theta d\theta d\varphi d\rho = \int_{\rho=۰}^{a} ۲\rho^۳ \int_{\varphi=۰}^{\pi/۲}\sin^۲\varphi\times ۰\times d\varphi d\rho = ۰$$

و در نتیجه $\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{K\cup K'} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_R divF dV = ۰$

سوال۵- روش سوم : اثبات مستقیم با تصویر کردن ناحیه روی صفحه xy :

بردار یکه قایم بر سطح K در نقطه (x,y,z) عبارت است از : $\vec{n} = \frac{۱}{a}(x,y,z)$

بنابر این $dydz = |\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}|dxdy = \frac{|x|/a}{z/a}dxdy = \frac{|x|}{z}dxdy$ و در نتیجه :

$$\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_K (x^۲,۰,۰)\cdot(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a})\frac{|x|}{z}dxdy = \frac{۱}{a}\iint_D \frac{x^۳|x|}{\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}}dxdy$$

D تصویر سطح K روی صفحه xy است که درون دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ است. از مختصات قطبی استفاده می کنیم.

$$\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{۱}{a}\int_{r=۰}^{۱}\int_{\theta=-\pi/۲}^{۳\pi/۲}\frac{a^۴r^۴\cos^۳\theta|\cos\theta|}{a\sqrt{۱-r^۲}}a^۲rd\theta dr = a^۴\int_{r=۰}^{۱}\frac{r^۵}{\sqrt{۱-r^۲}}(\int_{\theta=-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۴\theta d\theta + \int_{\theta=\pi/۲}^{۳\pi/۲}-\cos^۴\theta d\theta)\,dr$$

اما داریم : $\int_{\theta=\pi/۲}^{۳\pi/۲}-\cos^۴\theta d\theta = \int_{\theta=-\pi/۲}^{\pi/۲}-\cos^۴(\theta+\pi)d(\theta+\pi) = -\int_{\theta=-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۴\theta d\theta$

بنابر این : $\iint_K \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = a^۴\int_{r=۰}^{۱}\frac{r^۵}{\sqrt{۱-r^۲}}(\int_{\theta=-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۴\theta d\theta - \int_{\theta=-\pi/۲}^{\pi/۲}\cos^۴\theta d\theta)\,dr = a^۴\int_{r=۰}^{۱}\frac{r^۵}{\sqrt{۱-r^۲}}\times ۰\times dr = ۰$

سوال۶- روش اول : قضیه دیورژانس :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_R divF dV = \iiint_R (y+۲y+۰)dydzdx = \int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{۱-x^۲}\int_{۰}^{۲-z}۳ydydzdx$$

$$= \int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{۱-x^۲}\frac{۳}{۲}(۲-z)^۲dzdx = \int_{-۱}^{۱}\frac{-۱}{۲}(۲-z)^۳|_{۰}^{۱-x^۲}dy = \int_{-۱}^{۱}\frac{-۱}{۲}[(۱+x^۲)^۳-۸]dx$$

$$= \frac{-۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(x^۶+۳x^۴+۳x^۲-۷)dx = \frac{-۱}{۲}(\frac{۱}{۷}x^۷+\frac{۳}{۵}x^۵+x^۳-۷x)|_{-۱}^{۱} = -(\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۵}+۱-۷) = \frac{۱۸۴}{۳۵}$$

سوال۶- روش دوم : قضیه دیورژانس (تغییر ترتیب انتگرالگیری) :

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲-z}\int_{-\sqrt{۱-z}}^{\sqrt{۱-z}}۳ydxdydz = \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲-z}۶y\sqrt{۱-z}dydz$$

$$= \int_{۰}^{۱}۳(۲-z)^۲\sqrt{۱-z}dz = ۳\int_{۰}^{۱}[\sqrt{۱-z}+۲(۱-z)\sqrt{۱-z}+(۱-z)^۲\sqrt{۱-z}]dz$$

$$= ۳[\frac{-۲}{۳}(۱-z)^{\frac{۳}{۲}}+\frac{-۴}{۵}(۱-z)^{\frac{۵}{۲}}+\frac{-۲}{۷}(۱-z)^{\frac{۷}{۲}}]_{۰}^{۱} = -۳(\frac{-۲}{۳}-\frac{۴}{۵}-\frac{۲}{۷}) = \frac{۱۸۴}{۳۵}$$

سوال۶- روش سوم : روش مستقیم (محاسبه روی سطوح) : سطح S ، اجتماع چهار سطح است.

$$S_۱ : z=۰, -۱\le x\le ۱, ۰\le y\le ۲ \;;\; \vec{n}=(۰,۰,-۱)\;;\; \vec{F}\cdot\vec{n} = -\sin(xy)$$

$$\rightarrow \quad I_۱ = \iint_{S_۱}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_۱}-\sin(xy)dydx = \int_{-۱}^{۱}\int_{۰}^{۲}-\sin(xy)dydx$$

$$S_2 : y=0, -1\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x^2 \ ;\ \vec{n}=(0,-1,0)\ ;\ \vec{F}\cdot\vec{n}=-(y^2+e^{xz^2})=-e^{xz^2}$$

$$\rightarrow \quad I_2=\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_2}-e^{xz^2}dxdz=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}-e^{xz^2}dzdx=-\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}e^{x(2-t)^2}dtdx$$

$$S_3 :\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2+1,\ z=1-x^2 \ ;\ \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}(2x,0,1)\ ;\ \vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}(2x^{2y}+\sin(xy))$$

$$\rightarrow \quad I_3=\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_3}\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}(2x^2y+\sin(xy))\sqrt{4x^2+1}dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2+1}(2x^2y+\sin(xy))dydx$$

$$\rightarrow \quad I_3=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2+1}2x^2ydydx+\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2+1}\sin(xy)dydx$$

$$S_4 :\ -1\le x\le 1,\ 1+x^2\le y\le 2,\ z=2-y \ ;\ \vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\ ;\ \vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}[y^2+e^{xz^2}+\sin(xy)]$$

$$\rightarrow \quad I_4\iint_{S_4}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{S_4}\frac{1}{\sqrt{2}}[y^2+e^{xz^2}+\sin(xy)]\sqrt{2}dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}[y^2+e^{x(2-y)^2}+\sin(xy)]dydx$$

$$\rightarrow \quad I_4=\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}y^2dydx+\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}e^{x(2-y)^2}dydx+\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}\sin(xy)\,dydx$$

انتگرال مورد نظر مساله ، مجموع این چهار انتگرال است :

$$\iint_{S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=I_1+I_2+I_3+I_4=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{x^2+1}2x^2ydydx+\int_{-1}^{1}\int_{1+x^2}^{2}y^2dydx$$

$$=\int_{-1}^{1}x^2(x^2+1)^2dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(8-(1+x^2))^3dx=\int_{-1}^{1}(2x^6+3x^4+7)dx=2(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}+7)=\frac{184}{35}$$

۱۳۹۳/۱۰/۱۷